Tentamen van Lineaire Algebra, 21 maart 2003, 13-16 uur

Schrijf je naam + student nummer op ieder vel. Bij elke vraag wordt argumentatie verwacht.
Alleen "ja", "nee" of "42" volstaat niet.

Opgave 1:

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} -13 & 20 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliseer A (met diagonaal matrix D en matrices Q en Q^{-1} expliciet uitgewerkt).

b) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -13x(t) + 20y(t) \\ y'(t) &= -12x(t) + 18y(t) \end{aligned}$$

c) Orthogonaliseer de verkregen oplossingsbasis ten opzichte van het inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f_1(t)\overline{g_1(t)}dt + \int_0^1 f_2(t)\overline{g_2(t)}dt,$$

waarbij $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ en $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.

Opgave 2:

Neem $V = P_3(\mathbb{R})$, de ruimte van reële polynomen van graad ≤ 3. Laat $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ de standaardbasis zijn. Neem $W = \{p \in V \mid p(x) = p(-x)\}$.

a) Toon aan dat W een deelruimte is van V.

b) Definiëer $T : V \to V$ door $T(p)(x) = p(x) + p(-x) + p(0)$. Toon aan dat W T-invariant is. Wat zijn $R(T)$ en $N(T)$?

c) Geef de matrixvoorstelling $[T]_\beta$.

Opgave 3:

Laat T de loodrechte spiegeling in de lijn $\ell = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ zijn.

a) Vind een basis β van eigenvectoren van T.

b) Vind de matrixvoorstelling $[T]_\beta$. Bewaart T de oriëntatie?

c) Laat X de ruimte zijn van alle lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ zijn. Neem $Y = \{U \in X \mid U \circ T = T \circ U\}$. Is Y een lineaire deelruimte van X?

d) Laat zien: Als $U \in Y$, dan zijn ℓ en $\ell^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \text{ loodrecht op } \ell\}$ invariant onder U.

e) Wat is $\dim(Y)$? Hint: als $U \in Y$, concludeer uit d) hoe $[U]_\beta$ eruit moet zien.

Opgave 4:

De overheid maakt studie van het gedrag van forenzen die per auto, per trein of met de fiets naar hun werk gaan. Er blijkt dat van maand tot maand $a = 10\%$ van de automobilisten overstappen op de trein. Van de treinreizigers stapt 10% over op de auto en 40% op de fiets. Van de fietsers stapt per maand 40% over op de auto en 10% op de trein.

a) Stel van dit proces een model op (met waarschijnlijkheidsmatrix).

b) Laat zien dat asymptotisch 70% van de forenzen zich per auto verplaatst.

c) De overheid wil het autogebruik inperken door automobilisten te stimuleren met de trein te gaan. Hoe groot moet de maandelijkse overgang a zijn, zodat nog maar een kwart van de forenzen de auto neemt?

Woonplaats: 9616 TK Scharmer | Jaar van eerste inschrijving: 2002 | Naam docent: Bruin

	4
1	4
2	7
3	9
4	0

8

24

1a $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-13-\lambda & 20\\ -12 & 18-\lambda\end{pmatrix}=(-13-\lambda)(18-\lambda)-(20)(-12)$

$=\lambda^2-5\lambda-234+240=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

$\lambda=2 \quad \vee \quad \lambda=3$

$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Bij } \lambda=3:}$

$\begin{pmatrix}-13 & 20\\ -12 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1\\ 3x_2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-13x_1+20x_2\\ -12x_1+18x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1\\ 3x_2\end{pmatrix}$

$-13x_1+20x_2=3x_1 \rightarrow 20x_2=16x_1 \rightarrow x_1=\frac{5}{4}x_2$

$-12x_1+18x_2=3x_2 \rightarrow 12x_1=15x_2 \rightarrow x_1=\frac{5}{4}x_2$

Oplossing bijv. $x_1=5$ en $x_2=4$ voor $\lambda=3$

Voor $\lambda=2$:

$-13x_1+20x_2=2x_1 \rightarrow 20x_2=15x_1 \rightarrow x_1=\frac{4}{3}x_2$

$-12x_1+18x_2=2x_2 \rightarrow 16x_2=12x_1 \rightarrow x_1=\frac{4}{3}x_2$

Dus bijv. $x_1=4$ en $x_2=3$ voor $\lambda=2$

+2

$Q=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}4 & 5 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\to r_1-\frac{5}{4}r_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{5}{4}\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\to r_2-12r_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{5}{4}\\ 0 & 4 & -12 & 16\end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{r_1\to 4r_1\\ r_2\to\frac{1}{4}r_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & -5\\ 0 & 1 & -3 & 4\end{array}\right)$

$Q^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix}-13 & 20\\ -12 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

$a'(t)=2a(t) \rightarrow a(t)=c_1e^{2t}$

$b'(t)=3b(t) \rightarrow b(t)=c_2e^{3t}$

+2

$\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4e^{2t} & -5e^{2t}\\ -3e^{3t} & 4e^{3t}\end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l}x(t)=4e^{2t}-3e^{3t}\\ y(t)=-5e^{2t}+4e^{3t}\end{array}\right.$

2a $V = P_3(\mathbb{R})$

$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$

$W = \{p \in V \mid p(x) = p(-x)\}$

1. $0 \in W$ want ~~[illegible]~~ $0|_x = 0|_{-x}$
2. Als $p \in W$ en $c \in \mathbb{R}$:

   $p(x) = p(-x)$ ~~[illegible]~~ dus $c \cdot p(x) = c \cdot p(-x)$ dus $c \cdot p \in W$
3. Als $p \in W$ en $q \in W$:

   $p(x) = p(-x)$ en $q(x) = q(-x)$ dus $p(x) + q(x) = p(-x) + q(-x)$

   dus $(p+q)(x) = (p+q)(-x)$ dus $p + q \in W$

Deze drie eigenschappe tonen aan dat W een lineaire

2 ruimte is; dat het een deelruimte van V is volgt uit

~~[illegible]~~ de definitie: $W = \{p \in V \mid \dots\}$

b $T: V \to V$

$T(p)(x) = p(x) + p(-x) + p(0)$

Neem $p \in W$ dan geldt $p(x) = p(-x)$

$T(p)(x) = p(x) + p(x) + p(0) = 2p(x) + p(0)$

$p \in W$ dus $2p \in W$. $p(0) \in \mathbb{R}$ dus dit verandert alleen de constante term, ~~[illegible]~~ heeft geen invloed op de symmetrie (verschuiving in y-richting) dus ook $2p + p(0) \in W$. ~~[illegible]~~

Conclusie: ~~[illegible]~~ $p \in W \Rightarrow T(p) \in W$ dus W is T-invariant.

~~[illegible] $R(T)$ bestaat uit alle polynomen [illegible]~~

~~$[T]_\beta =$~~

~~$R(T) = W$~~ Neem ~~[illegible]~~ $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

dan is $T(p)(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d + a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d + d =$

$ax^3 - ax^3 + bx^2 + bx^2 + cx - cx + d + d + d = 2bx^2 + 3d$.

3 $R(T)$ is dus $\{c_1 x^2 + c_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$; overigens ook W.

~~[illegible]~~ en $N(T) = \{c_1 x^3 + c_2 x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ omdat $2b$ en $3d$

~~[illegible]~~ beide 0 moeten zijn.

c
$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T(1)(x) = 1 + 1 + 1 = 3 = 3\beta_0$

2 $T(x)(x) = x - x + 0 = 0$

$T(x^2)(x) = x^2 + (-x)^2 + 0 = 2x^2 = 2\beta_2$

$T(x^3)(x) = x^3 + (-x)^3 + 0 = 0$

Postcode en Woonplaats: 9616 TK Schasmer | Jaar van eerste inschrijving: 2002 | Naam docent: Bruin

3a ~~[illegible]~~

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ want alles op l wordt op zichzelf afgebeeld ~~[illegible]~~ De andere twee vectoren spannen het vlak op loodrecht op l door $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ omdat de vectoren hieruit ook in hun eigen ~~[illegible]~~ verlengde worden afgebeeld. Dus voor een vector (x, y, z) uit dit vlak geldt:

$\langle (x, y, z), (1, -3, 2) \rangle = 0$

$x - 3y + 2z = 0$

Willekeurige keuze: $x = 3,\ y = 1,\ z = 0$

$\beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Andere willekeurige lineair onafhankelijke keuze: $x = -2,\ y = 0,\ z = 1$

$\beta_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$T(\beta_1) = \beta_1$ (ligt op l)

$\left. \begin{array}{l} T(\beta_2) = -\beta_2 \\ T(\beta_3) = -\beta_3 \end{array} \right\}$ (spiegeling in de oorsprong)

T bewaart inderdaad de oriëntatie want ~~det([T]~~

2 $\det([T]_\beta) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 > 0$

c $Y = \{ U \in X \mid U \circ T = T \circ U \}$

1. $0 \in Y$ want dan beeldt U alles af op $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en T beeldt ook $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ af op $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ~~[illegible]~~
2. Als $U \in Y$ dan geldt dus

   $U \circ T = T \circ U$

   Neem $c \in \mathbb{R}$:

   $c(U \circ T) = c(T \circ U)$

   $(cU) \circ T = T \circ (cU)$ vanwege de lineariteit van U en V

   dus ook $cU \in Y$
3. Als $U \in Y$ en $Z \in Y$ dan:

   $U \circ T = T \circ U$

   $Z \circ T = T \circ Z$

2 $(U + Z) \circ T = T \circ (U + Z)$ weer vanwege de lineariteit,

dus ook $U + Z \in Y$

d $\mathcal{U} \in Y$, dus
$\mathcal{U} \circ T = T \circ \mathcal{U}$
We hebben al gezien dat l en l^{+} T-invariant zijn, dus
voor $x \in L = l \cup l^{+}$ geldt:
$T(x) \in L$
$\mathcal{U}(T(x)) = T(\mathcal{U}(x))$

1

e $[T]_{\beta}[\mathcal{U}]_{\beta} = [\mathcal{U}]_{\beta}[T]_{\beta}$ voor $\mathcal{U} \in Y$
$[T]_{\beta}[\mathcal{U}]_{\beta}[T^{-1}]_{\beta} = [\mathcal{U}]_{\beta}$
want T^{-1} bestaat, nl. terugspiegelen, dus $T^{-1} = T$
$[T]_{\beta}[\mathcal{U}]_{\beta}[T]_{\beta} = [\mathcal{U}]_{\beta}$
~~$[\mathcal{U}]_{\beta}$ is dus een diagonaalmatrix, dus de dimensie is 3.~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c \\ -d & e & f \\ -g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Dus:

2

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \middle| \, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim(Y) = 5$

geen som 4?